2 次元 2 状態量子ウォークの弱収束定理

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
関 元樹 (Motoki SEKI) *

概要

量子ウォークはランダムウォークの量子版とされる数理モデルである．ランダムウォークの長時間極限の漸近挙動を中心極限定理が記述するように，量子ウォークの漸近挙動は弱収束定理によって記述される．1 次元の一様な量子ウォークにおいての弱収束定理は 2002 年に今野によって示された．極限確率分布において，初期状態に依存しない部分は今野関数と呼ばれ，様々な 1 次元量子ウォークモデルの極限確率分布に現れることが知られている．これまでに見出された 2 次元の量子ウォークの極限確率分布に現れる関数は，一見 2 次元今野関数に見えるものの，その関係性は 1 次元の場合と比べて十分に明らかではなかった．本研究では，2 次元 2 状態の一様な量子ウォークを解析し，1 次元今野関数との関係性を厳密に明らかにすることで，真の 2 次元今野関数と呼ぶべき関数を特定した．本研究は現在のところ arXiv のプレプリント [1] として発表されている．なお，本研究は滋賀大学の浅原啓介氏，北海学園大学の船川大樹氏，公立小松大学の鈴木章斗氏との共同研究である．

1　導入

量子ウォークはランダムウォークの量子版とされる数理モデルであり，本研究では離散時間量子ウォークに焦点を当てる．以下ではランダムウォークと対比しながら量子ウォークと，その弱収束定理を紹介する．

1.1　ランダムウォークの概要

ランダムウォークの漸近挙動は中心極限定理により記述される．簡単のため，その内容を 1 ステップあたり右に 1 サイト移動する確率を $p = 1/2$ とする場合について述べる．

定理 1 (1 次元単純ランダムウォークにおける中心極限定理)**.** スケールしたウォーカーの位置を表す確率変数 $S_t/\sqrt{t}$ は，$t \to \infty$ の極限において，標準正規分布に分布収束する：

$$\frac{S_t}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1). \tag{1}$$

なお，本テクニカルレポートにおいて，記号 $\Longrightarrow$ は分布収束（あるいは，確率変数の弱収束）を表すものとする．

* E-mail:marmot.motoki@gmail.com

この定理は直感的には以下のような意味を持つ：

- 単純ランダムウォークでは，特徴的な拡散のスケールは $v = \sqrt{t}$ である．
- 確率分布は，原点付近で確率が高く，周辺に至って低くなる，ガウシアンの形状を保ちながら拡散していく．

次節以降ではランダムウォークの特徴と比較しながら 1 次元量子ウォークのモデルの定義と特徴を述べていく．

1.2 離散時間量子ウォーク

典型的な 1 次元の離散時間量子ウォークモデルの定義を以下で述べる．まず，時刻を $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で表し，空間は $\mathbb{Z}$ とする．ウォーカーの状態空間はヒルベルト空間

$$\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) = \left\{ \Psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|^2_{\mathbb{C}^2} < \infty \right\} \tag{2}$$

とする．$\mathbb{Z}$ の各サイト上に $\mathbb{C}^2$ のベクトルが配置されていて，2 乗総和可能な関数として定義される．X_t を量子ウォーカーの位置を表す確率変数とする．時刻 t における位置 x に量子ウォーカーが存在する確率は次の式で計算される：

$$P(X_t = x) = |\Psi^{(1)}(t,x)|^2 + |\Psi^{(2)}(t,x)|^2. \tag{3}$$

続いて，1 次元の離散時間量子ウォークのダイナミクスについて述べる．時間発展作用素は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U である．初期状態が $\|\Psi_0\| = 1$ なる $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ であるとき，t ステップ後の状態 $\Psi_t = U^t\Psi_0$ で与えられる[*1]．時間発展作用素は典型的には 2 つの $\mathcal{H}$ 上の作用素 S と C を用いて $U = SC$ と表される．この 2 つの作用素はそれぞれ（条件付き）シフト作用素とコイン作用素と呼ばれる．$\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ 上の左シフト作用素 L を次のように定義する：

$$L\psi(x) = \psi(x+1), \qquad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

この L を用いて，シフト作用素 S は $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ 上の行列表示として，

$$S := \begin{pmatrix} L & O \\ O & L^* \end{pmatrix} \tag{4}$$

と定義される．一方コイン作用素 C の方は，一般には各サイトごとに 2×2 のユニタリ行列 $C(x)$ が定義されていて，それをすべてのサイトに直和することが多い．量子ウォークモデルが一様な場合はすべての $x \in \mathbb{Z}$ において $C(x)$ が等しく，次のように表すことができる：

$$C := \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} e^{i\delta/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha}a & e^{i\beta}b \\ -e^{-i\beta}b & e^{-i\alpha}a \end{pmatrix} \tag{5}$$

[*1] もし，系のハミルトニアン H が存在するとすれば，$U = e^{-iH}$ とみなせば，$\Psi_t = e^{-itH}\Psi_0$ となり，Schrödinger 方程式と対応づく．しかし，一般には量子ウォークに対応するハミルトニアンの存在は言えないことが多い．

図 1　ランダムウォークと Hadamard ウォークの数値シミュレーションした確率分布の比較図．
青線がランダムウォーク，橙線が Hadamard ウォークを示す．

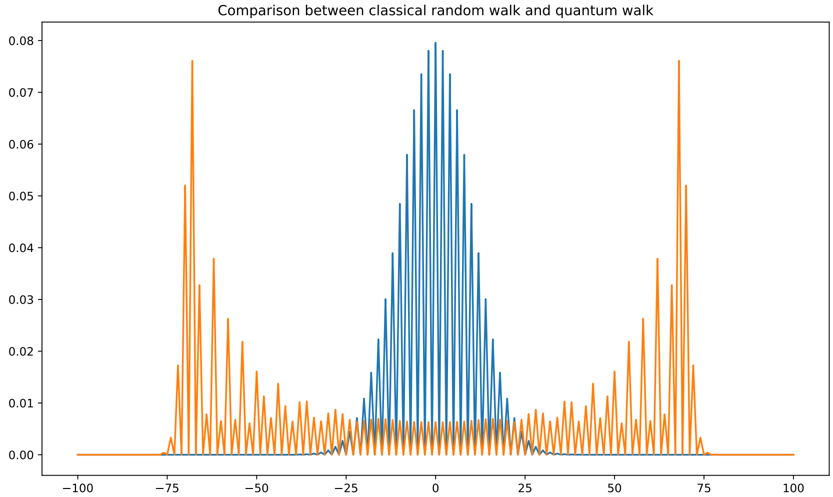
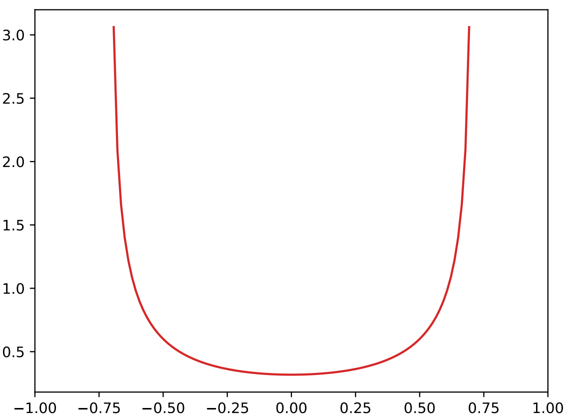


図 2　1 次元今野関数 $f_{\mathrm{K}}(v;r)$



ここで，$a,b \in [0,1]$ は，$a^2+b^2=1$ を満たし，$\alpha,\beta,\delta \in [-\pi,\pi)$ である．以上で，1 次元の離散時間量子ウォークモデルのダイナミクスが定義された．

ランダムウォークと一様な離散時間量子ウォークの典型的なモデルである Hadamard ウォークをそれぞれ数値シミュレーションした結果が図 1 である．このシミュレーションから 1 次元量子ウォークはランダムウォークに比して次のような特徴があることが分かる：

- 量子ウォークはランダムウォークに比して拡散が早い．
- ランダムウォークは確率分布が原点付近の確率が高く，周辺に至って確率が低くなるガウシアンの形状を保ちながら拡散していくのに対して，量子ウォークは原点付近の確率が低く，確率が高い 2 つの山が左右に拡散していく，確率分布の形状が**逆釣鐘型**である．

表 1　古典ランダムウォークと量子ウォークの比較

比較項目	古典ランダムウォーク	量子ウォーク
確率過程か否か？	Yes	No
何が時間発展するのか？	確率測度	ウォーカーの状態
主要な定理	中心極限定理	弱収束定理
スケーリングされた確率変数	$S_t/\sqrt{t}$	X_t/t
典型的な確率分布	標準正規分布	今野分布
分布の形状	単峰型	逆釣鐘型

1.3　1 次元量子ウォークの弱収束定理

離散時間量子ウォークにおける最も基本的な定理が**弱収束定理**である．一様な 1 次元量子ウォークに関する弱収束定理は，2002 年に今野によって組合せ論的手法を用いて示された．その定理の主張が以下の通りである：

定理 2 (Konno (2002)[2])**.** 一様な 1 次元量子ウォーク $U = SC$ の S と C はそれぞれ式 (4) と (5) で定義されたものとする．このとき，スケールされた位置を表す確率変数 X_t/t は $t \to \infty$ である確率変数 V_{K} に弱収束する：

$$\frac{X_t}{t} \Longrightarrow V_{\mathrm{K}}. \tag{6}$$

V_{K} の累積分布関数は

$$\begin{aligned} P\left(V_{\mathrm{K}} \leq x\right) &= \lim_{t\to\infty} P\left(\frac{X_t}{t} \leq x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x} w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max})\, dv \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる．ここで $w(v)$ は初期状態に依存する v の関数で，**今野関数** $f_{\mathrm{K}}(v;r)$ と定数 $v_{\max} = a$ は初期状態に依存しない．また，今野関数は以下で与えられる：

$$f_{\mathrm{K}}(v;r) := \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi(1-v^2)\sqrt{r^2-v^2}} I_{(-r,r)}(v). \tag{8}$$

ここで，$I_S(v)$ は集合 S の指示関数である．

本定理の重要な点はランダムウォークの拡散スケールが $\sqrt{t}$ なのに対し，量子ウォークでは t である点である．このことを，ランダムウォークが**拡散的広がり** (diffusive spreading) を示すのに対して，量子ウォークは**線形的広がり** (ballistic spreading, linear spreading) を示すという．確率密度関数の形状がランダムウォークがガウシアンの形状をしているのに対して，量子ウォークは逆釣鐘形をしている．特に $v = -v_{\max}, v_{\max}$ まわりで確率が高くなる．

表 2　最大の速さを用いた，1 次元量子ウォークの分類．ここで，δ_x は $x \in \mathbb{R}$ におけるデルタ測度である．

分類	極限分布	挙動
(a) $v_{\max} = 0$	δ_0	束縛状態
(b) $v_{\max} \in (0, 1)$	今野分布	線形的広がり
(c) $v_{\max} = 1$	$C_{-1}\delta_{-1} + C_{+1}\delta_{+1}$	一方向への運動

古典ランダムウォークと量子ウォークの特徴を比較したのが表 1 である．古典ランダムウォークは確率過程の一種であるのに対して，量子ウォークは確率過程ではない．これは古典ランダムウォークは確率測度が時間発展するのに対して，量子ウォークが時間発展するのはウォーカーの状態であって，確率分布は時間発展された状態から非可逆的に計算されるものだからである．

1.4　1 次元量子ウォークにおける最大の速さ $v_{\max}$

1 次元の量子ウォークと 2 次元の量子ウォークを統一的に理解するために，**最大の速さ** $v_{\max}$ という，モデルに依存する定数を導入する．Fourier 変換した時間発展作用素から，分散関係 $\omega(k)$ が計算できる．1 次元の一様な量子ウォーク（式 (4) 及び (5)）においては次のようになる：

$$\omega(k) = a\cos(k + \alpha). \tag{9}$$

ただし k は $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ を動く．この分散関係を波数 k で微分すると，群速度 $v_{\mathrm{g}}(k)$ が計算できる．その最大値を最大の速さ $v_{\max}$ と定義する：

$$v_{\max} := \max_{k\in\mathbb{T}} |v_{\mathrm{g}}(k)| = \max_{k\in\mathbb{T}} \left| \frac{d\omega(k)}{dk} \right|. \tag{10}$$

これを計算すると，$v_{\max} = a$ となる．

このように最大の速さを導入すると，1 次元量子ウォークを最大の速さによって表 2 のように分類することができる．2 次元の量子ウォークについても，この最大の速さ $v_{\max}$ という定数で量子ウォークを分類していく．

1.5　2 次元量子ウォークの先行研究と本研究の目的

1 次元の量子ウォークの極限確率分布については，多様なモデルで解析が進められてきた一方で，2 次元の量子ウォークに関する研究は十分に進んでいない．

Watabe らは Grover ウォークを一般化した，2 次元 4 状態の 1 パラメータ量子ウォークに対して，次のような極限確率分布の絶対連続部分を導出した [3]：

$$f(v_1, v_2) = \frac{1}{\pi^2(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)} I_E(v_1, v_2), \tag{11}$$

ここで，E は $\pi/4$ 傾けた単一の楕円で，

$$E = \left\{ (v_1, v_2) \;\middle|\; \frac{(v_1 + v_2)^2}{4a} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{4(1 - a)} < 1 \right\} \tag{12}$$

と定義される．

Di Franco らは alternate quantum walk と呼ばれる特定の 2 次元 2 状態量子ウォークが，2 次元 4 状態の Generalized Grover walk モデルの極限確率分布の絶対連続部分と，等しい確率分布を持つという意味で対応づくことを示した [4, 5].

しかし，式 (11) の f を 2 次元の今野関数と認めることは次の理由からできない．f と 1 次元今野関数 f_{K} を比較すると，$\sqrt{r^2 - v^2}$ に相当する部分が f_{K} には存在するものの，f には存在しない．1 次元から 2 次元に持ち上げるにあたって関数形が単純になるとは考えにくい．

1 次元のモデルで存在する概念が 2 次元や多次元のモデルに存在するのか，存在するならば具体的にどのような形になっているのかを調べるのは数学的に自然な動機である．よって本学位論文は 2 次元量子ウォークにおける真の今野関数と，その 1 次元今野関数との関係性を探求することを目的とする．

2 セッティング

時刻は $t = 0, 1, 2, \ldots$ とし，空間は $\mathbb{Z}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ とする．2 変数 (x_1, x_2) をまとめて普通のイタリック体 x で表し，今後現れる変数の組も同様に表す．状態のヒルベルト空間は $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) \simeq \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^2$ である．我々は 2 次元 2 状態量子ウォークモデル (2D2SQW) を次のように定義する：

$$U = S_2 C_2 S_1 C_1, \tag{13}$$

ここで，$j = 1, 2$ に対して，$S_j := L_j \oplus L_j^*$ であり，L_j は $\ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C})$ 上の左/下シフト作用素で

$$L_1 \psi(x_1, x_2) := \psi(x_1 + 1, x_2), \quad L_2 \psi(x_1, x_2) := \psi(x_1, x_2 + 1), \qquad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}) \tag{14}$$

とする．コイン作用素は格子全体にわたって一様で，$C_j := \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}^2} C_{j,0}$ で $C_{j,0} \in U(2)$ は次で定義される：

$$C_{j,0} := e^{i\delta_j/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_j} a_j & e^{i\beta_j} b_j \\ -e^{-i\beta_j} b_j & e^{-i\alpha_j} a_j \end{pmatrix}, \tag{15}$$

ここで，$a_j, b_j \in [0, 1]$ で，パラメータは次を満たす：

$$a_j^2 + b_j^2 = 1, \tag{16}$$

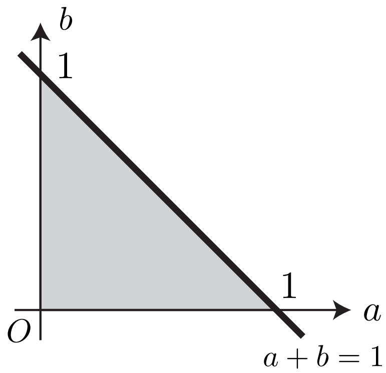
$$\alpha_j, \beta_j, \delta_j \in [-\pi, \pi), \qquad \det C_{j,0} = e^{i\delta_q}. \tag{17}$$

我々は次のパラメータを導入する：

$$a := a_2 a_1, \qquad b := b_2 b_1. \tag{18}$$

式 (16) より，パラメータ (a, b) が満たす条件は $a + b \leq 1,\ a \geq 0,\ b \geq 0$ であることが分かる．その様子を図示したのが三角形の領域を表した図 3 である．ここで，後の便宜のためこの領域を Δ と名付けておく：逆に，この三角形領域の任意の点 (a, b) を取ったとき，条件 (16) を満たすような，a_j, b_j が存在する．ただし，このモデルが 1 次元のモデルに reduce される場合を除くために，パラメータが $ab = 0$ となる点を除くことにする．

図 3　パラメータ領域 $(a,b) \in \Delta$．これらのパラメータは灰色で塗られた領域の内部と $a+b=1$ となる境界を任意にとりうる．$ab=0$ となる境界は除く．



初期状態を $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ とすると，時刻 t における状態は $\Psi_t = U^t\Psi_0$ で与えられる，ここで Ψ_0 は $\|\Psi_0\| = 1$ という条件を満たす．位置 (x_1, x_2) の上への正射影作用素 $\hat{\Pi}_{(x_1,x_2)} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は

$$\left(\hat{\Pi}_{(x_1,x_2)}\Psi\right)(y_1,y_2) := \begin{cases} \Psi(x_1,x_2), & (y_1,y_2) = (x_1,x_2), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{19}$$

で定義される．時刻 t における量子ウォーカーの x_1 方向と x_2 方向の位置を表す確率変数をそれぞれ $X_{1,t}$ と $X_{2,t}$ とする．このとき，時刻 t においてウォーカーを位置 (x_1,x_2) に見出す確率は次で与えられる：

$$P((X_{1,t}, X_{2,t}) = (x_1,x_2)) = \left\|\hat{\Pi}_{(x_1,x_2)}\Psi_t\right\|^2. \tag{20}$$

3　主結果

3.1　2 次元量子ウォークにおける最大の速さ $v_{\max}$

2D2SQW に対しても最大の速さ $v_{\max}$ を導入する．2D2SQW の分散関係 $\omega(k)$ は次で与えられる：

$$\cos\omega(k) = a\cos(k_2 + k_1 + \alpha_2 + \alpha_1) - b\cos(k_2 - k_1 + \beta_2 - \beta_1). \tag{21}$$

ただし k は $\mathbb{T}^2$ を動く．その群速度は $v_{\mathrm{g}}(k) := \nabla_k\omega(k) = (v_{\mathrm{g},1}(k), v_{\mathrm{g},2}(k))$ で定義される．これを用いて，最大の速さ $v_{\max}$ は次で定義される：

$$v_{\max} = \max_{j=1,2}\max_{k\in\mathbb{T}^2}|v_{\mathrm{g},j}(k)|. \tag{22}$$

これを計算すると，$v_{\max} = a + b$ を得る．

最大の速さを用いて，パラメータ領域 (a,b) を 3 つのクラスに分類する：

- $v_{\max} = \max\{a,b\} \iff \Delta_{ab=0} := \{(a,b) \in \Delta \mid ab = 0\}$.
- $v_{\max} \in (0,1) \iff \Delta_{(0,1)} := \{(a,b) \in \Delta \mid a+b < 1, ab \neq 0\}$.
- $v_{\max} = 1 \iff \Delta_1 := \{(a,b) \in \Delta \mid a+b = 1, ab \neq 0\}$.

このうち，$(a,b)\in\Delta_{ab=0}$ については上でも述べたように，解析からは除外する．よって，主結果を $v_{\max}\in(0,1)$ の場合と，$v_{\max}=1$ の場合に分けて記述する．

3.2 $v_{\max}\in(0,1)$ の場合

この小節では，次の条件が満たされているとする：

$$(a,b)\in\Delta_{(0,1)},\qquad \text{i.e.}\qquad v_{\max}\in(0,1),\ ab\neq 0.$$

まず，$j=1,2$ に対して，$\pi/4$ 回転した楕円領域 E_j を次のように定義する：

$$E_j:=\left\{(v_1,v_2)\,\middle|\,\frac{(v_1+v_2)^2}{4a_j^2}+\frac{(v_1-v_2)^2}{4b_j^2}\le 1\right\}. \tag{23}$$

この E_j に対応して，関数 F_j を次で定義する：

$$F_j(v_1,v_2):=1-\frac{(v_1+v_2)^2}{4a_j^2}-\frac{(v_1-v_2)^2}{4b_j^2}. \tag{24}$$

また，関数 $F_0(v_1,v_2)$ を次で定義する：

$$F_0(v_1,v_2):=\frac{(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2}{2ab}\left\{1-\frac{(v_1+v_2)^2}{4a_0^2}-\frac{(v_1-v_2)^2}{4b_0^2}\right\}. \tag{25}$$

ただし，

$$a_0^2:=\frac{(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2}{b_1^2+b_2^2},\qquad b_0^2:=\frac{(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2}{a_1^2+a_2^2}. \tag{26}$$

とする．この準備をもって，定理を述べる：

定理 3 (2D2SQW の弱収束定理)**.** $v_{\max}\in(0,1)$ とする．このとき，X_t/t の極限分布は次で与えられる：

$$P(V_1\le x,V_2\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sum_{\#=\pm}w_\#(v_1,v_2)f_\#(v_1,v_2)\,dv_1dv_2. \tag{27}$$

ここで，$w_\#$ は初期状態に依存する関数である．$f_\#$ は初期状態に依存しない関数で，

$$f_\pm=\frac{F_0\pm\sqrt{F_1F_2}}{2\pi^2(1-v_1^2)(1-v_2^2)\sqrt{F_1F_2}}I_{E_1\cap E_2} \tag{28}$$

で与えられる．

上の定理で与えられた極限の累積分布関数を次で書き直す：

定義 4 (1 次元極限)**.**

$$G_b(x,y):=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sum_{\#=\pm}w_\#(v_1,v_2)f_\#(v_1,v_2)\,dv_1dv_2. \tag{29}$$

また，1 次元極限 $b\to 0$ を次で定義する：パラメータ a_1 を $0<a_1<1$ となるように固定し，G_b の極限を $b_2\to 0$ とすることで，弱収束の意味でとる．この意味で極限が存在するときに，

$$G_0:=\lim_{b\to 0}G_b(x,y) \tag{30}$$

とかく．

この定義のもとで，次の定理が得られた：

定理 5. $v_{\max} \in (0,1)$ とする．このとき，1 次元極限 $G_0(x,y)$ は存在して，

$$G_0(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max})\, dv, & y \geq x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{y} w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max})\, dv, & x > 0. \end{cases} \tag{31}$$

この定理は形式的には $\{(v,v) \mid v \in [-v_{\max}, v_{\max}]\}$ の線分上で次を意味する：

$$\frac{d}{dv} G_0(v,v) = w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max}). \tag{32}$$

この意味で，我々が導いた関数 $f_\pm$ は 1 次元今野関数 f_{K} へと収束する．よって，我々は $f_\pm$ は 2 次元今野関数と呼ぶにふさわしいと考える．

3.3 $v_{\max} = 1$ の場合

この小節では，次の条件が満たされているとする：

$$(a,b) \in \Delta_1 \qquad \text{i.e.} \qquad v_{\max} = 1,\ ab \neq 0.$$

2 つの楕円 E_j は縮退して，

$$E := \left\{ (v_1, v_2) \;\middle|\; \frac{(v_1+v_2)^2}{4a} + \frac{(v_1-v_2)^2}{4b} \leq 1 \right\} \tag{33}$$

となる．また，対応する関数 F を次で定義する：

$$F(v_1,v_2) := 1 - \frac{(v_1+v_2)^2}{4a} - \frac{(v_1-v_2)^2}{4b} \tag{34}$$

補題 6. $(a,b) \in \Delta_1$ とする．次が成立する：

1. $E = E_j\ (j = 1,2)$.
2. $F = F_j\ (j = 1,2)$.
3. $2abF = F_0$.

この補題と式 (28) の $f_\pm$ とを組み合わせると，f_+ は Watabe ら，Di Franco らの関数 f（式 (11)）と一致し，f_- は消えてしまうことが分かる．また，2 つの楕円の共通部分 $E_1 \cap E_2$ は E に縮退する．

定理 7. $(a,b) \in \Delta_1$ とする．このとき，X_t/t の極限分布は次で与えられる：

$$P(V_1 \leq x, V_2 \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} w_+(v_1,v_2) f(v_1,v_2)\, dv_1 dv_2. \tag{35}$$

我々の結果は Watabe らや Di Franco らの結果を $v_{\max} = 1$ かつ $ab \neq 0$ の特別な場合として含むという意味で，洗練させたものということができる．しかし，次の定理によってこの関数は 2 次元今野関数ということができないことがわかる．$H(x) = I_{[0,\infty)}(x)$ をヘビサイド関数とする．

表 3　量子ウォークの 2 次元分布と 1 次元分布の関係性.

パラメータ	$v_{\max}$	2 次元分布		1 次元分布
$(a,b) \in \Delta_{ab=0}$	$\max\{a,b\}$	1DQW		なし
$(a,b) \in \Delta_{(0,1)}$	$(0,1)$	$w_+ f_+ + w_- f_-$	$\xrightarrow[b\to 0]{a+b<1}$	$w f_{\mathrm{K}}$
$(a,b) \in \Delta_1$	1	（Watabe ら，Di Franco ら）$w_+ f$	$\xrightarrow[b\to 0]{a+b=1}$	$C_{-1}\delta_{-1} + C_{+1}\delta_{+1}$

定理 8. $(a,b) \in \Delta_1$ とする．$G_b(x,y)$ を式 (35) の右辺で定義する．このとき，極限 $G_0 = \lim_{b\to 0} G_b$ が存在して，

$$G_0(x,y) = \begin{cases} C_{-1}H(x+1) + C_{+1}H(x-1), & y \geq x \\ C_{-1}H(y+1) + C_{+1}H(y-1), & x > y. \end{cases} \tag{36}$$

ここで，初期状態に依存する関数 w_+ が定数を決定する：$C_{\pm 1} = w_+(\pm 1, \pm 1)$.

この定理は形式的には $\{(v,v) \mid v \in [-v_{\max}, v_{\max}]\}$ の線分上で次を意味する：

$$\frac{d}{dv} G_0(v,v) = C_{-1}\delta_{-1}(v) + C_{+1}\delta_{+1}(v). \tag{37}$$

すなわち，Watabe らや Di Franco らが得た f は $b \to 0$ の極限で次に収束することが分かる：

$$C_{-1}\delta_{-1} + C_{+1}\delta_{+1}. \tag{38}$$

結果的に，まとめると，表 3 のように 2 次元分布と 1 次元分布の関係性が得られたことが分かる.

4　まとめ

本研究において，我々は 2D2SQW の新たな 2 次元極限確率分布を得た．確率分布の台は 2 つの楕円の共通部分となる．得られた確率分布を 1 次元に潰すような極限を取ると 1 次元量子ウォークの今野関数が現れる．この意味で，我々の得た関数 $f_\pm$ は「真の 2 次元今野関数」と呼ぶことができる．また，我々の得た確率分布は先行研究で得られた確率分布を特別な場合として含んでいる.

参考文献

[1] K. Asahara, D. Funakawa, M. Seki, A. Suzuki, Two-dimensional quantum central limit theorem by quantum walks, arXiv:2408.09578.

[2] N. Konno, Quantum random walk in one dimension, Quant. Inf. Process. **1**, 5, 345–354 (2002).

[3] K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori, N. Konno, Limit distributions of two-dimensional quantum walks, Phys. Rev. **A 77**, 6, 062331 (2008).

[4] C. Di Franco, M. Mc Gettrick, Th. Busch, Mimicking the probability distribution of a two-dimensional Grover walk with a single-qubit coin, Phys. Rev. Lett. **106**, 8, 080502 (2011).

[5] C. Di Franco, M. Mc Gettrick, T. Machida, Th. Busch, Alternate two-dimensional quantum walk with a single-qubit coin, Phys. Rev. **A 84**, 4, 042337 (2011).